

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

# **ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПРИРОДНЫЕ ЯВЛЕНИЯ И КАТАСТРОФЫ**

**Том II**

**ГЕОЛОГИЯ УРАНА,  
ГЕОЭКОЛОГИЯ, ГЛЯЦИОЛОГИЯ**

Москва  
2011

УДК 504.0  
ББК 26.2  
Г35

**Экстремальные природные явления и катастрофы** : в 2 т. / Отв. ред. А.О. Глико;  
ИФЗ РАН. – М. : ИФЗ РАН, 2010; 2011.

ISBN 978-5-91682-012-6

**Г35 Т. 2 : Геология урана, геоэкология, гляциология** / Отв. ред. В.М. Котляков, ИГ РАН;  
отв. сост. А.Л. Собисевич, ИФЗ РАН; – М. : ИФЗ РАН, 2011.

ISBN 978-5-91682-014-0

Во втором томе коллективной монографии изложены результаты теоретических и экспериментальных исследований, связанных с изучением актуальных проблем современной геологии урановых месторождений, геоэкологии и гляциологии, имеющих целью обеспечение безопасности населения и важных промышленных объектов на территории Российской Федерации. Анализируются основные промышленно-генетические типы урановых месторождений; рассмотрены новые прогрессивные технологии добычи радиоактивных материалов; изучено поведение актинидов в условиях долгосрочного хранения и захоронения отработанного ядерного топлива. Полученные научные результаты отражают современные проблемы безопасности атомной энергетики.

Приведены новые научные данные, связанные с изучением эволюции Антарктического и арктических ледниковых покровов, от состояния которых зависит уровень Мирового океана. Достаточно внимания уделено геоэкологическим проблемам Северного Кавказа. Анализируются уникальные данные, полученные при проведении глубокого кернового бурения ледника на Западном плато вулканической постройки Эльбруса.

Изучены наиболее опасные геоэкологические процессы на территории РФ, которые могут привести к гибели людей, ранению и потере здоровья, а также к значительным материальным ущербам; разработан специальный ГИС-проект, который является готовым к использованию продуктом со всеми элементами, присущими автоматизированной информационной системе специального назначения, содержащей развернутые базы данных.

Полученные новые научные результаты и разработанные технологии уже востребованы на практике.

Для специалистов в области наук о Земле, строительства и чрезвычайных ситуаций.

УДК 504.0  
ББК 26.2

The Volume II of the collective monograph presents the results of both theoretical and experimental studies of actual problems of modern geology of uranium deposits, geoecology and glaciology in order to mitigate issues on public safety and potentially hazardous industrial facilities and consequent risks on the territory of Russian Federation. Primary types of industrial uranium ore deposits are analysed, new progressive technologies of prospecting of radioactive materials are considered, the behaviour of actinides in long-time storages and nuclear waste burial sites are studied. The results obtained represent modern safety problems of nuclear power engineering.

New scientific data related to evolution of glaciers in Arctic and Antarctica governing the global level of world ocean are presented. Specific attention is paid to geoecological problems in Northern Caucasus. Genuine data gathered in the course of deep core drilling on the Western plateau of the Elbrus volcano.

Most significant hazardous geoecological processes on the territory of Russian Federation, threatening populated areas in terms of human health and injury, substantial property damage are studied. The specialized geographical information system (GIS) is the database driven product with high level of automation and it has been developed in frames of the actual research initiative.

The new fundamental scientific results obtained and the new technologies developed are of particular interest for practical applications.

The book will satisfy the needs of specialists in Earth sciences, industrial construction applications and hazard assessment.

ISBN 978-5-91682-014-0  
ISBN 978-5-91682-012-6

© Российская академия наук, 2011  
© Коллектив авторов, 2011

*O.B. Руденко<sup>1,2</sup>, А.Л. Собисевич<sup>2</sup>, Л.Е. Собисевич<sup>2</sup>*

# О ФИЗИКЕ АКУСТИЧЕСКИХ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ И МЕДЛЕННЫХ ВОЛНАХ В ГРАНУЛИРОВАННОЙ ФЛЮИДОНАСЫЩЕННОЙ СРЕДЕ

<sup>1</sup> Физический факультет Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

<sup>2</sup> Учреждение Российской академии наук Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН

Статья состоит из двух частей. В первой части излагаются основы физики акустических нелинейностей. Во второй – особенности распространения линейных и нелинейных волн в зернистых средах, поры в которых содержат жидкость и газ. Первая часть помогает понять физику нелинейных волновых задач, которые в литературе часто излагаются формально, с акцентом на сложную математику. Вторая часть связана с простой моделью среды, в которой скорость распространения одной из волновых мод мала, а потому велика нелинейность и эффекты взаимодействия выражены сильнее обычного.

## Часть 1. ОСНОВЫ ФИЗИКИ ИНТЕНСИВНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН

В этой части дана классификация типов акустической нелинейности. Приведены примеры различных нелинейностей, рассказано о некоторых нелинейных явлениях, нелинейной диагностике и основных нелинейных моделях.

### 1. Об акустической нелинейности

Первые вопросы, возникающие при изучении интенсивных волн, обычно таковы: откуда берутся нелинейные члены в математических моделях, описывающих процессы возбуждения и распространения волн? Какая среда является более, а какая менее нелинейной и чем определяется величина нелинейных модулей упругости?

Ниже используется следующая условная классификация. Мы будем говорить о нелинейности гра-

ниц (B) и объема (V) среды. Каждая из них, в свою очередь, подразделяется на геометрическую (G), физическую (P) и структурную (S) нелинейности. Таким образом, например, VG означает «объемная геометрическая» нелинейность, а BS – «границная структурная» нелинейность.

#### 1.1. Границная нелинейность

**1.1.1.** Рассмотрим плоский поршень, совершающий колебания в направлении нормали (которая совпадает с осью  $x$ ) к своей поверхности и возбуждающий бегущую продольную волну в упругой среде, которая занимает полупространство  $x > 0$  (рис. 1).

Пусть смещение поршня из среднего положения  $x = 0$  известно; оно описывается законом  $x = X(t)$ . От поршня убегает волна, скорость частиц среды в которой изменяется как

$$u = u_0 \Phi(t - x/c). \quad (1)$$

Поскольку скорость движения поверхности поршня должна совпадать со скоростью частиц среды на этой поверхности, для неизвестной функции  $\Phi$  получаем функциональное уравнение

$$u_0 \Phi\left(t - \frac{X(t)}{c}\right) = \frac{dX}{dt}. \quad (2)$$

В частности, если поршень движется по гармоническому закону  $X(t) = -X_0 \cos \omega t$ , для нахождения функции  $\Phi$  имеем

$$\frac{u}{u_0} = \Phi\left(\omega t + \frac{u_0}{c} \cos \omega t\right) = \sin \omega t, \quad u_0 = \omega X_0. \quad (3)$$

Очевидно, что при гармоническом законе движения поршня  $X(t)$  форма бегущей волны  $\Phi(t)$  содержит

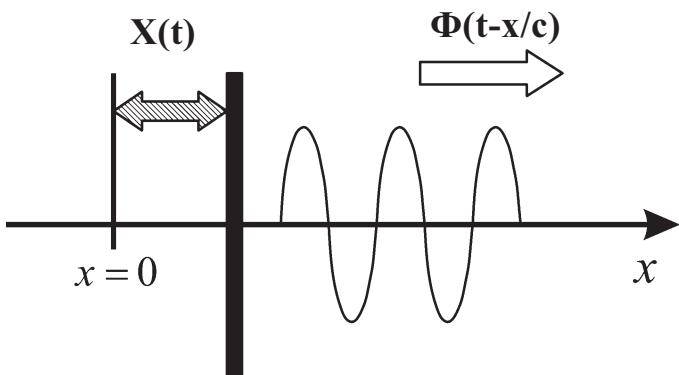


Рис. 1. Поршень, совершающий колебания большой амплитуды, и нелинейность, обусловленная конечностью смещения границы

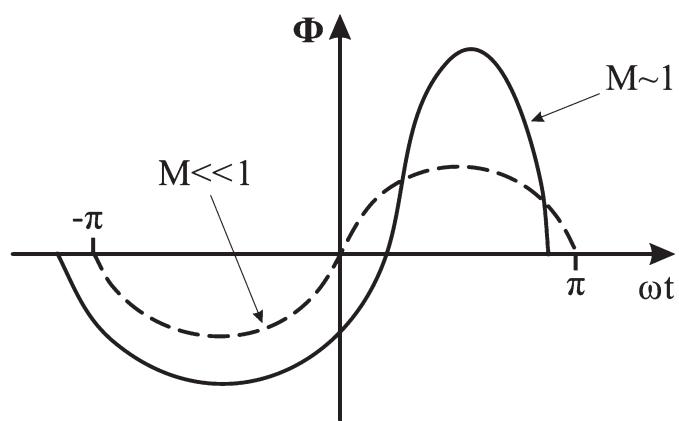


Рис. 2. Бегущая волна, искаженная граничной нелинейностью

как постоянную составляющую, так и высшие гармоники. Различие между функциями  $X(t)$  и  $\Phi(t)$  усиливается с ростом числа Маха  $M = u_0/c$  и становится особенно заметным при скоростях движения поршня, сравнимых со скоростью звука. Такая ситуация может возникнуть в жидкостях с пузырьками газа, в которых скорость звука может быть очень малой, а также в резонаторах, где эффекты граничной нелинейности могут накапливаться со временем.

Поскольку нелинейность связи (2) не зависит от характеристик среды, ее имеет смысл называть BG – «геометрической» или «кинематической» нелинейностью.

Форма одного периода бегущей волны (3) изображена на рис. 2. Для малых чисел Маха волна почти синусоидальна, а при конечных значениях  $M$  полу-

жительный и отрицательный «полупериоды» временного профиля искажены неодинаково.

Для расчета спектрального состава сигналов, заданных неявными функциями, в акустике развит ряд простых приемов (см. [1]). Используя их, найдем коэффициенты  $C_n$  разложения волны (3) в ряд Фурье:

$$\frac{u}{u_0} = \Phi(\omega t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(in\omega t) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t],$$

$$C_n = \frac{i^{-n}}{n} J'_n(nM). \quad (4)$$

В частности, для постоянной составляющей и первых двух гармоник имеем

$$A_0 = -\frac{M}{2}, \quad B_1 = J_0(M) - J_2(M), \quad (5)$$

$$A_2 = -\frac{1}{2}[J_1(2M) - J_3(2M)].$$

Постоянная составляющая скорости направлена в сторону поршня. Ее появление связано с идеализированным представлением колеблющейся границы в виде бесконечной плоскости. Очевидно, что из-за одинакового давления в любой точке плоскости, ортогональной к оси (в отличие от поршня конечного размера) жидкость не может подтекать к оси  $x$  (см. [2]).

На рис. 3 изображено облако кавитационных пузырьков, возникающее вблизи мощного ультразвукового излучателя. Скорость звука здесь может уменьшиться до 20–40 м/с. Пузырьки колеблются и схлопываются, излучая при этом широкополосный шум. Этот шум взаимодействует с колебаниями границы, и его спектр воспроизводится у «подножия» дискретных составляющих – высших гармоник основной частоты УЗ источника. В результате широкополосный шум усиливается, а его спектр эффективно уширяется [3]. Описанное явление дополняет хорошо известные [4] механизмы уширения спектров под действием объемной нелинейности.

Другие задачи, требующие учета конечности смещения границы, связаны с накоплением нелинейных искажений в добротных резонаторах. Поскольку форма интенсивных «стоячих» волн сильно искажена, происходит их насыщение при использовании гармонической накачки. Следовательно, для того, чтобы продолжить процесс «закачивания» энергии в резонатор, нужно изменить форму колебаний границы [5] (по-

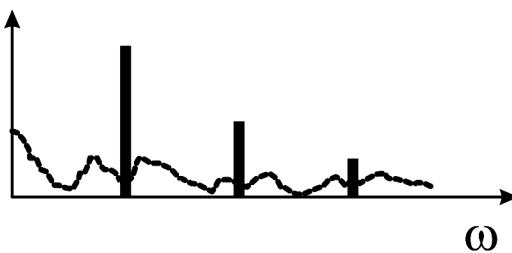
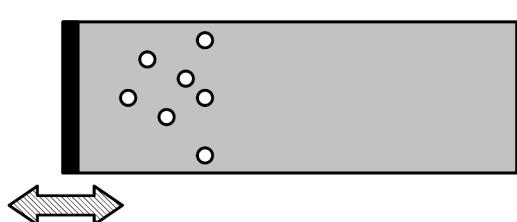
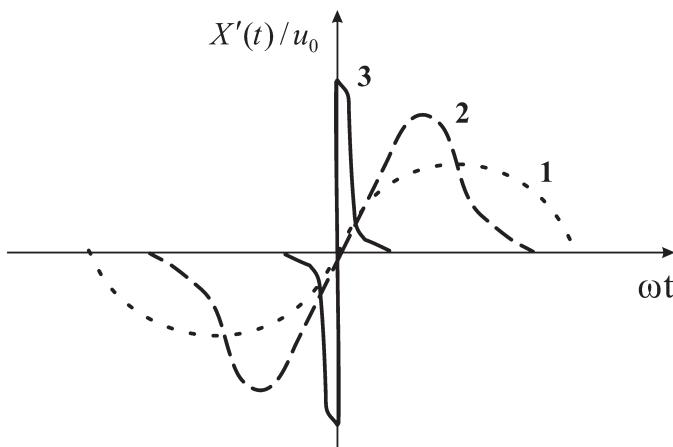


Рис. 3. Уширение спектра кавитационного шума при его взаимодействии с колеблющейся границей



**Рис. 4.** Форма одного периода колебаний границы, обеспечивающая накопление энергии в полости резонатора в условиях проявления граничной нелинейности. Кривые 1, 2 и 3 отвечают растущим значениям  $U_0$

добно тому, как мы увеличиваем промежуток времени между толчками при раскачивании качелей). Необходимая для поддержания резонансного возбуждения форма колебаний источника изображена на рис. 4.

**1.1.2.** В реальной ситуации следует считать заданным не закон смещения поршня  $x = X(t)$ , а приложенную к поршню силу  $F(t)$ . Например, если на электромеханический преобразователь подается переменное электрическое напряжение  $V$ , известен именно закон  $V(t)$  и, следовательно,  $F(t)$ . Уравнение колебаний для поршня с массой  $m$  и с площадью поверхности  $S$  при этом таково:

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = F(t) - p_a S. \quad (6)$$

Здесь  $p_a$  – давление на поршень, создаваемое убегающей волной. Давление связано со скоростью нелинейным соотношением, известным из теории римановых волн; если волна слабо нелинейная, эта связь содержит только линейный и квадратично-нелинейный члены:

$$\frac{p_a}{c^2 \rho} = \frac{u}{c} + \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{u}{c} \right)^2. \quad (7)$$

Поскольку на поверхности поршня  $u = X'(t)$ , уравнение (6) примет вид

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{c \rho S}{m} \frac{dX}{dt} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2c} \frac{dX}{dt} \right) = \frac{1}{m} F(t). \quad (8)$$

Ясно, что реакция убегающей волны на поршень также нелинейная. В частности, при гармоническом изменении силы  $F(t)$  закон движения поршня  $X(t)$  будет содержать высшие гармоники. Нелинейность проявляется тем сильнее, чем больше произведение  $\varepsilon M$  нелинейного параметра среды и числа Маха. В отличие от примера 1.1.1, реакция среды обусловлена нелинейной зависимостью давления от скорости

(в твердых телах можно говорить о нелинейной зависимости напряжения от деформации, то есть об отклонении от закона Гука). Поэтому описанная нелинейность содержит, наряду с «геометрической» BG еще и «физическую» BP составляющую.

**1.1.3.** Рассмотрим теперь нелинейность границы BS, на которой происходит контакт двух тел. Классическим примером служит задача о двух сферах (контакт Герца [6]). Сила, с которой отталкиваются сферы, радиусы которых  $R_1$  и  $R_2$ , зависит нелинейно от разности смещений их центров  $(\xi_2 - \xi_1)$ , появившейся вследствие деформирования:

$$F = E \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} (\xi_2 - \xi_1)^{3/2} \theta(\xi_2 - \xi_1). \quad (9)$$

Здесь  $E$  – эффективный модуль, зависящий от модулей Юнга  $E_1$  и  $E_2$  материала сфер и коэффициентов Пуассона  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ :

$$\frac{1}{E} = \frac{3}{4} \left( \frac{1 - \sigma_1^2}{E_1} + \frac{1 - \sigma_2^2}{E_2} \right). \quad (10)$$

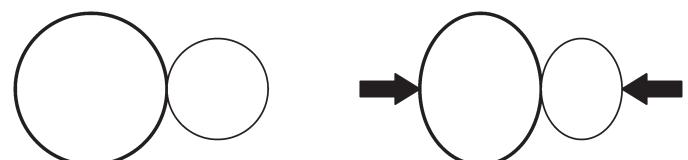
При отрицательных значениях разности смещений  $(\xi_2 - \xi_1)$  сферы расходятся не деформируясь, и сила равна нулю. При положительных значениях этой разности сила зависит от нее как  $(\xi_2 - \xi_1)^{3/2}$ .

Очевидно, что при колебаниях системы из двух шариков под действием периодической внешней силы нелинейность существенна только в тех случаях, когда сильно изменяется площадь соприкосновения тел. Если контакт «поджат» большим статическим усилием, нелинейность уменьшится (рис. 5).

Свойства герцевских контактов используются при описании нелинейной динамики гранулированных сред (см. [7]), нелинейного контакта шероховатых поверхностей [8] и ряда других систем.

На рис. 6 изображена система из двух пластин, одна из которых (нижняя) является гладкой, а вторая – шероховатой.

Очевидно, с ростом прижимающего усилия  $P$  все большее число «зубцов» (т. е. микро-выступов на контакте) деформируется и жесткость контакта возрастает. Если  $P \rightarrow 0$ , падающая волна с частотой  $\omega$  почти полностью отразится от границы раздела. Напротив, если  $P \rightarrow \infty$ , волна пройдет через границу, так как акустический контакт будет идеальным. В обоих случаях отраженной волны на частоте  $2\omega$  не возникнет. Вторая гармоника рождается при промежуточных значениях  $P$ , а зависимость ее амплитуды от  $P$  имеет



**Рис. 5.** Нелинейный контакт Герца

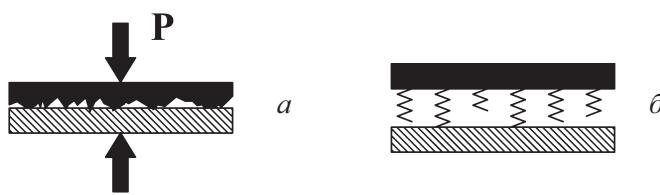


Рис. 6. Шероховатая поверхность (а) и модель (б) в виде ансамбля пружин разной длины, но одинаковой жесткости

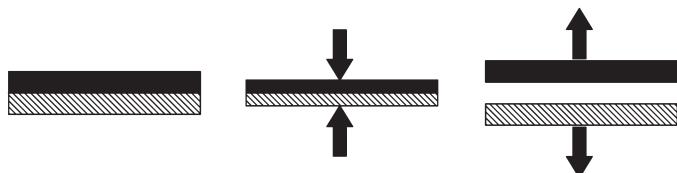


Рис. 7. К пояснению механизма «хлопающей» нелинейности

максимум. Интересно, что эта кривая представляет статистическое распределение высот микровыступов (при использовании модели, показанной на рис. 6, б).

Другим примером BS – «структурной» граничной нелинейности – служит так называемая «хлопающая» нелинейность (рис. 7).

Сжимающая сила вызывает упругую реакцию, а при растяжении контакт разрывается и тела расходятся. Осциллирующее по гармоническому закону напряжение вызывает сильные искажения деформационных осцилляций, в спектре которых появляются высшие гармоники.

В общем случае нелинейность существенна для динамики любых контактов, по-разному реагирующих на сжатие и растяжение.

**1.1.4.** Следующий тип граничной нелинейности BG наблюдается при обтекании осциллирующим потоком тел, имеющих острые кромки. Градиенты потока имеют порядок  $u / \max(r, \delta)$  где  $\delta = \sqrt{v/\omega}$  – толщина акустического пограничного слоя,  $r$  – минимальный радиус кривизны препятствия,  $v$  – кинематическая вязкость. Для острых кромок ( $r \rightarrow 0$ ) толщина  $\delta$  является определяющей. Нелинейность существенна при числе Рейнольдса  $Re \sim 1$ , пропорциональном отношению членов в уравнении движения (12):

$$Re \sim \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| \sim \frac{u}{\sqrt{\omega v}} = \sqrt{\frac{2I}{c\omega\eta}}. \quad (11)$$

Согласно формуле (11), в воздухе ( $\eta = 0,018 \cdot 10^{-3}$  Па·с) на частоте 500 Гц заметная нелинейность должна наблюдаться при уровнях звука  $\sim 120$  дБ. Эта оценка согласуется с данными экспериментов. Если же на краях отверстий образуются вихри (рис. 8), нелинейные явления наблюдаются начиная с 90 дБ [9].

На рис. 8 изображена схема резонансного звукопоглотителя. Колебания воздуха в отверстиях перфорированной панели затухают из-за трения о стенки, сеточки или специальный волокнистый материал. При правильном выборе параметров на определен-

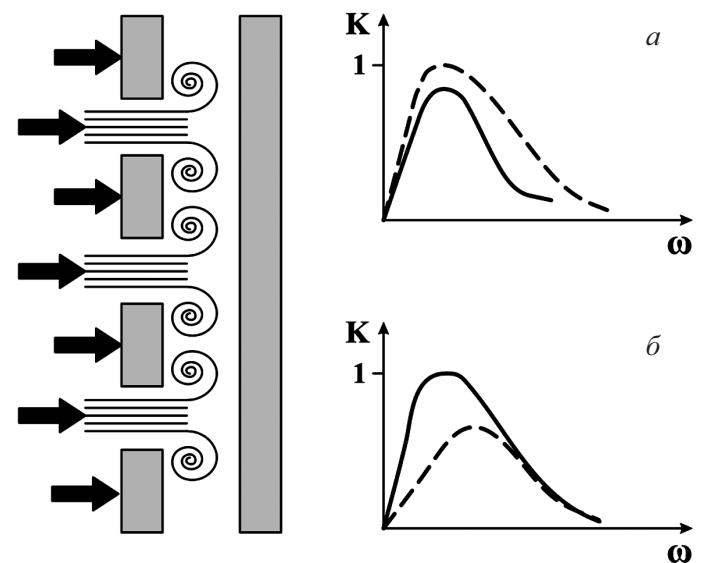


Рис. 8. Проявление нелинейности – образование завихрений на выходе горла резонаторов Гельмгольца. Сплошные кривые – нелинейные частотные характеристики резонансного звукопоглотителя, сплошные – линейные кривые

ной частоте можно добиться полного поглощения ( $K=1$ ). Нелинейность может уменьшить коэффициент  $K$  для линейно согласованного поглотителя (а) или увеличить его для несогласованного (б); линейные частотные характеристики даны штриховыми кривыми, нелинейные – сплошными [9]. Таким образом, при создании поглотителей для интенсивного звука нужно учитывать эффекты граничной нелинейности.

## 1.2. Объемная нелинейность

Объемная нелинейность  $V$ , в отличие от граничной  $G$ , может приводить к нелинейным эффектам, накапливающимся при распространении волн в среде. Если, например, на входе в среду волна была гармонической, при ее распространении будет происходить усиливающаяся с расстоянием генерация высших гармоник. Расстояние, на котором амплитуда 2-й гармоники достигает  $1/2$  от амплитуды 1-й (без учета реакции), есть длина образования разрыва (характерная «нелинейная длина»). На этом расстоянии укладывается много длин волн, их число равно  $(2\pi c M)^{-1}$  [1].

**1.2.1.** Напомним, как выделяют физическую и геометрическую нелинейности в уравнениях гидродинамики. Уравнения движения, непрерывности и состояния имеют вид [2]

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \nabla p) \vec{u} \right] = -\nabla p + \eta \Delta \vec{u} + \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \text{grad div } \vec{u}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0, \quad p = p(\rho). \quad (13)$$

Пусть невозмущенное состояние среды есть  $\rho = \rho_0$ ,  $p = p_0$ ,  $\vec{u} = 0$ . Возмущения параметров, свя-

занные с волной, обозначим штрихованными буквами и положим в формулах (12), (13)

$$\rho' = \rho_0 + \rho, \quad p = p_0 + p', \quad \frac{\rho'}{\rho} \sim \frac{p'}{p_0} \sim \frac{|\vec{u}|}{c_0} \sim \mu \ll 1.$$

Уравнения движения и непрерывности примут вид

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla p' - \eta \Delta \vec{u} - \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \text{gradiv } \vec{u} &= \\ = -\rho' \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - (\rho_0 + \rho') (\vec{u} \nabla) \vec{u}, \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \vec{u} &= -\text{div}(\rho' \vec{u}). \end{aligned}$$

В левых частях этих уравнений собраны линейные, в правых – нелинейные члены. Появление последних обусловлено нелинейностью исходных уравнений, а не свойствами среды, поэтому указанную нелинейность называют «геометрической» – VG. Напротив, нелинейность уравнения состояния

$$p' = c_0^2 \rho' + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right) \rho'^2 + \dots = c_0^2 \rho' + \frac{(\gamma - 1)c_0^2}{2\rho_0} \rho'^2 + \dots$$

связана с нелинейной зависимостью между приращениями давления и плотности, то есть это – физическая нелинейность VP. Заметим, что для адиабатического уравнения состояния переход к линейной среде соответствует  $\gamma = c_p / c_v = 1$ . При этом, однако, волна останется нелинейной, для нее коэффициент нелинейности  $\varepsilon$  обращается не в ноль, а в единицу из-за неустранимости VG.

**1.2.2.** Обсудим теперь объемные нелинейности для твердых тел. Уравнение движения и связь тензоров напряжений  $\sigma_{ik}$  и деформаций  $e_{ik}$  (которая в отсутствие нелинейных членов известна как закон Гука) имеют вид

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_{ik}, \quad \sigma_{ik} = K e_{il} \delta_{ik} + 2\mu \left( e_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} e_{ll} \right) + O(e_{ik}^2). \quad (14)$$

Здесь  $U_i$  – вектор смещений,  $K, \mu$  – модули всестороннего сжатия и сдвига [6],

$$e_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} + \frac{\partial U_l}{\partial x_k} \frac{\partial U_l}{\partial x_i} \right). \quad (15)$$

Посредством  $O(e_{ik}^2)$  обозначена группа нелинейных членов

$$\begin{aligned} O(e_{ik}^2) &= \left( \mu + \frac{A}{4} \right) \left( \frac{\partial U_l}{\partial x_i} \frac{\partial U_l}{\partial x_k} + \frac{\partial U_i}{\partial x_l} \frac{\partial U_k}{\partial x_l} + \frac{\partial U_l}{\partial x_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_l} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left( K - \frac{2}{3} \mu + B \right) \left( \frac{\partial U_l}{\partial x_m} \frac{\partial U_l}{\partial x_m} \delta_{ik} + 2 \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \frac{\partial U_l}{\partial x_l} \right) + \frac{A}{4} \frac{\partial U_k}{\partial x_l} \frac{\partial U_l}{\partial x_i} + \\ &+ B \left( \frac{\partial U_l}{\partial x_m} \frac{\partial U_m}{\partial x_l} \delta_{ik} + 2 \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \frac{\partial U_l}{\partial x_l} \right) + C \frac{\partial U_l}{\partial x_l} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \delta_{ik}, \end{aligned}$$

где  $A, B, C$  – нелинейные модули упругости 3-0 порядка (коэффициенты Ландау [6] в разложении внутренней энергии по степеням тензора деформаций):

$$E = \mu e_{ik}^2 + \left( \frac{K}{2} - \frac{\mu}{3} \right) e_{ll}^2 + \frac{A}{3} e_{ik} e_{il} e_{kl} + B e_{ik}^2 e_{ll} + \frac{C}{3} e_{ll}^3.$$

Очевидно, геометрическая нелинейность VG появляется в связи (15) между тензором деформаций и компонентами вектора смещений, а физическая нелинейность VP – это все члены в выражении  $O(e_{ik}^2)$ .

**1.2.3.** Рассмотрим теперь твердые среды с наследственными, в том числе с гистерезисными свойствами. Начало исследования таких систем связано с работами Л. Больцмана (1876) и В. Вольтерра (1913). Вместо «уравнений состояния», содержащих физическую нелинейность, здесь принято говорить об «определяющих уравнениях».

Еще Вольтерра при построении нелинейной теории наследственной упругости использовал представление Фреше для нелинейного функционала в виде ряда кратных интегралов, аналогичное ряду Тейлора. Для одномерного случая (скалярный вариант) разложение Вольтерра–Фреше имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \int_{-\infty}^t G_1(t-\tau) d\epsilon(\tau) + \\ &+ \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t G_2(t-\tau_1, t-\tau_1) d\epsilon(\tau_1) d\epsilon(\tau_2) + \dots \quad (16) \\ e(t) &= \int_{-\infty}^t J_1(t-\tau) d\sigma(\tau) + \\ &+ \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t J_2(t-\tau_1, t-\tau_1) d\sigma(\tau_1) d\sigma(\tau_2) + \dots \end{aligned}$$

Здесь ядра  $G_i$  называют функциями релаксации, а ядра  $J_i$  – функциями ползучести. Иногда вместо общего разложения (16) используют модельные нелинейные функционалы – уравнения Работнова и Линдермана–Розовского

$$\begin{aligned} \phi[e(t)] &= \sigma(t) + \int_{-\infty}^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau, \quad (17) \\ e(t) &= \psi[\sigma(t)] + \int_{-\infty}^t K(t-\tau) \chi[\sigma(t)] d\tau. \end{aligned}$$

Выбор ядер и аппроксимирующих функций – сложная проблема; она основана на экспериментальных данных и проводится отдельно для каждого материала и заданной области внешних условий (различные диапазоны температур, скоростей деформирования и других параметров).

Теории типа Вольтерра относятся к процессам с запаздыванием, но обратимым в том смысле, что кривые мгновенного деформирования при нагрузке и разгрузке совпадают. В гистерезисных средах ситуация может быть иной.

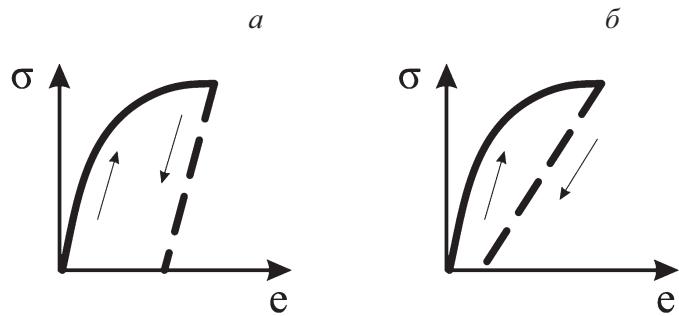


Рис. 9. Нагружение и разгрузка материалов с гистерезисом

На рис. 9 изображены зависимости напряжения от деформации, учитывающие пластическое деформирование с разгрузкой для металла и для материала с деструкционной псевдопластичностью (пример: армированные пластики с концентрацией напряжений на изгибающих волокнах, трещинах) [10]. Нелинейность в металлах связана с накоплением существенно необратимой пластической деформации, и закон разгрузки близок к линейному (а). В случае (б) при разгрузке часть трещин «закрывается», и график разгрузки приближается к началу координат.

Для циклических процессов удобна модель зависимости напряжения от деформации в форме Рэлея (1887).

Эта петля на рис. 10 задана формулами (участки A'B'A, ABA')

$$\sigma = (E + be_m)e + \frac{b}{2}(e^2 - e_m^2), \quad \sigma = (E + be_m)e - \frac{b}{2}(e^2 - e_m^2)$$

и  $\sigma = Ee - be^2$  – на участке 0A'. Остаточные напряжения и гистерезисные потери (за цикл) даются следующими выражениями:

$$\sigma^* = \frac{b}{2}e_m^2, \quad W = \oint e \cdot d\sigma = \frac{4}{3}e_m^3.$$

В последние годы в области акустики сред с гистерезисом появилось значительное число публикаций. Однако большинство работ, как и в механике [10], носит скорее материаловедческий характер. Вместе с тем, имеет смысл постановка и решение прямых и обратных нелинейных волновых задач, в том числе для целей нелинейной диагностики (см. раздел 2). Волны ведут себя в наследственных средах иначе, чем при обычной алгебраической зависимости  $p'(p')$  или  $\sigma(e)$ . Для «релаксирующих» (в смысле Мандельштама–Леоновича [2]) зависимостей между параметрами нелинейные волны исследованы достаточно подробно [1], но для гистерезисных сред таких результатов мало. В качестве примера на рис. 11 сравнивается искажение симметричного треугольного импульса, распространяющегося в обычной нелинейной среде и в среде с гистерезисом.

Если в обычной среде площадь импульса (количество движения) сохраняется, а длительность воз-

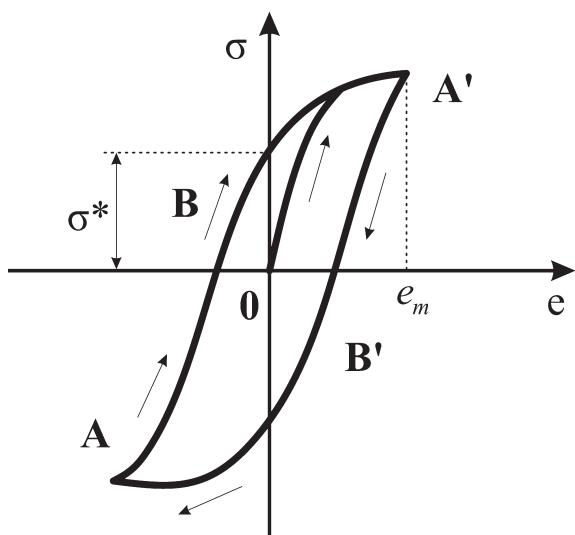


Рис. 10. Гистерезис Рэлея

растает, то в гистерезисной среде уменьшаются как площадь, так и длительность. Волна не может проникнуть в среду на расстояние, большее 5–10 нелинейных длин как из-за сильной диссипации энергии, так и из-за потерь на формирование остаточных деформаций в среде. В примере на рис. 11 волна «исчезает» в точке  $-0,5$  на оси абсцисс.

**1.2.4.** Рассмотрим теперь так называемую «структурную» объемную нелинейность VS. Этот тип нелинейности связан не с нелинейным характером сил межмолекулярного взаимодействия, а с дефектами среды на надмолекулярном (мезоскопическом) уровне. В жидкостях такой тип нелинейности возникает при появлении пузырьков газа. Известно, что нелинейный параметр газированной воды может на 2–3 порядка превысить нелинейность каждого из составляющих смеси – как газа ( $\varepsilon=1,2$ ), так и воды ( $\varepsilon=3,5$ ). Гигантская нелинейность пузырьковых жидкостей открыла возможность детектирования небольшого числа (и даже одиночных) пузырьков для целей диагности-

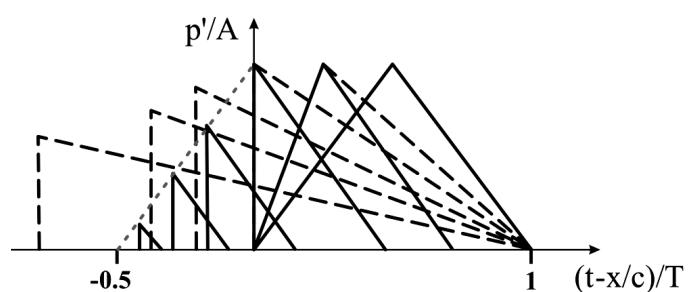


Рис. 11. Искажение профиля однополярного импульса при распространении в гистерезисной среде (сплошные кривые) и в обычной нелинейной среде (штриховые кривые)

ки кессонной болезни при декомпрессии или в различных промышленных технологиях. Сейчас большое развитие получили медицинские диагностические технологии, основанные на инъекции в кровеносные сосуды специальных контрастных агентов на основе стабильных микропузырьковых взвесей.

Сильный рост нелинейности в среде, содержащей хорошо сжимаемые включения, можно пояснить простым примером. Пусть тонкий слой легкой сжимаемой среды окружен более плотной средой с большим значением скорости звука (пример: тонкий слой воздуха в воде или водном геле). В задаче есть два малых параметра: отношение акустических импедансов и волновая толщина слоя:  $\rho_0 c_0 / \rho_1 c_1 \sim \omega / c_0 h \ll 1$ . Решение задачи о прохождении волн через этот слой [15] показывает, что 2-я гармоника на его выходе оказывается в  $K$  раз более сильной, когда легкий слой окружен плотной средой (по сравнению со случаем, когда плотной среды нет). Величина «усиления» нелинейности для генерации 2-й гармоники равна

$$K = \frac{P_{2\omega}^{inhg}}{P_{2\omega}^{hg}} = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \left( \frac{c_1^2 \rho_1}{c_0^2 \rho_0} \right)^2.$$

Для воздушного слоя в воде  $K \approx 5,5 \cdot 10^7$ . Если слой состоит из воды с пузырьками, объемная концентрация которых порядка  $10^{-4}$ , усиление будет порядка 5000.

Объяснение гигантскому усилинию нелинейности очень простое. Пусть в слое воды распространяется волна с характерным давлением порядка нескольких атмосфер. Это – слабая волна, потому что внутреннее давление в воде порядка 23000 атм. Однако когда такое давление начинает действовать на слой воздуха, оно изменяет его объем в несколько раз, то есть приводит к сильно нелинейным деформациям.

В твердых структурно-неоднородных средах (гранулированные, флюидонасыщенные, трещиноватые, пористые и др.)  $K$  также достигает  $10^2$ – $10^3$ . Рост  $K$  – признак наличия дефектов. Нелинейность гранулированных сред обсуждалась в разделе 1.1.3. Другим важным примером сред с большой структурной нелинейностью являются трещиноватые среды.

Известно, что приложенное к образцу среды напряжение усиливается на кончике острой трещины в  $K = \sqrt{l/r_0}$  раз (рис. 12), где  $l$  – длина трещины,  $r_0$  – радиус кривизны ее конца. Когда  $r_0 \rightarrow 0$ ,  $K \rightarrow \infty$ . При больших напряжениях вблизи конца среда пластически деформируется, и  $r_0$  принимает некоторое конечное значение.

Прямое подтверждение усиления нелинейных акустических свойств среды с ростом числа трещин дано В.А. Робсманом [16] (рис. 13). Бетонная балка нагружалась на стенде статическим напряжением, растущим вплоть до ее разрушения. С ростом напряжения увеличивалось число трещин и структурная нелинейность среды возрастила. При одних и тех же длине (6 м) и уровне исходного сигнала наблюдалось усиление нелинейных волновых взаимодействий (на

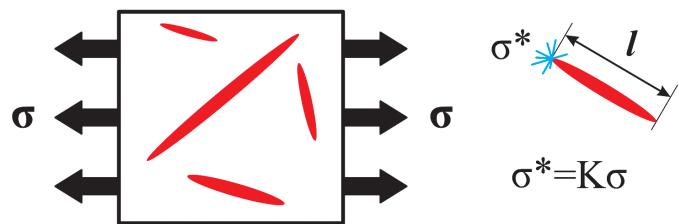


Рис. 12. Вблизи острого конца трещины приложенное извне напряжение усилено в  $K \gg 1$  раз

рис. 13 как пример показано взаимодействие узкой линии сигнала с широким шумоподобным спектром).

Очевидно, с развитием системы трещин уменьшается прочность материала, поэтому усиление нелинейных эффектов в дефектной среде может служить критерием потери прочности [17].

## 2. 0 нелинейной диагностике

**2.1.** Идеи, лежащие в основе нелинейных методов диагностики и неразрушающего контроля, хорошо известны (см., например, [18]). С ростом амплитуд (интенсивностей) волн нарушается принцип суперпозиции: пересекаясь во времени и в пространстве, достаточно сильные волны начинают взаимодействовать, обмениваясь энергией. При этом каждая из волн «запоминает» как характеристики своих «партнеров», так и материальные характеристики среды (в той области, где это взаимодействие произошло). Эта информация может быть «доставлена» к приемнику самими исходными волнами, испытавшими кросс-модуляцию, а также излучаться непосредственно из области взаимодействия в виде новых спектральных компонент, отсутствовавших в исходном волновом спектре.

Общий подход к восстановлению границ и внутренней структуры нелинейных рассеивателей должен базироваться на методах решения обратных задач – нелинейной акустической томографии [19]. Однако даже простейший способ диагностики, основанный на генерации гармоник и комбинационных частот, – весьма эффективен, особенно когда среда содержит сильно нелинейные включения типа пузырьков или трещин. Фактически любое аналитическое решение прямой нелинейной задачи содержит параметры (нелинейные модули, амплитуды волн, геометрические характеристики), которые можно определить экспериментально по измерениям нелинейно искаженного волнового поля или его спектра.

Нелинейная задача диагностики решена при обнаружении дефектов в объеме твердотельных изделий (рис. 14, предоставлен И.Ю. Соловьевым). Верхняя часть рис. 14 содержит изображение рельефа стоячих волн на поверхности плиты, колеблющейся на частоте 20 кГц. Внутренних дефектов не видно. Зато на нижней половине рис. 14 отчетливо видна объемная трещина. Ее изображение получено на частоте седьмой гармоники –

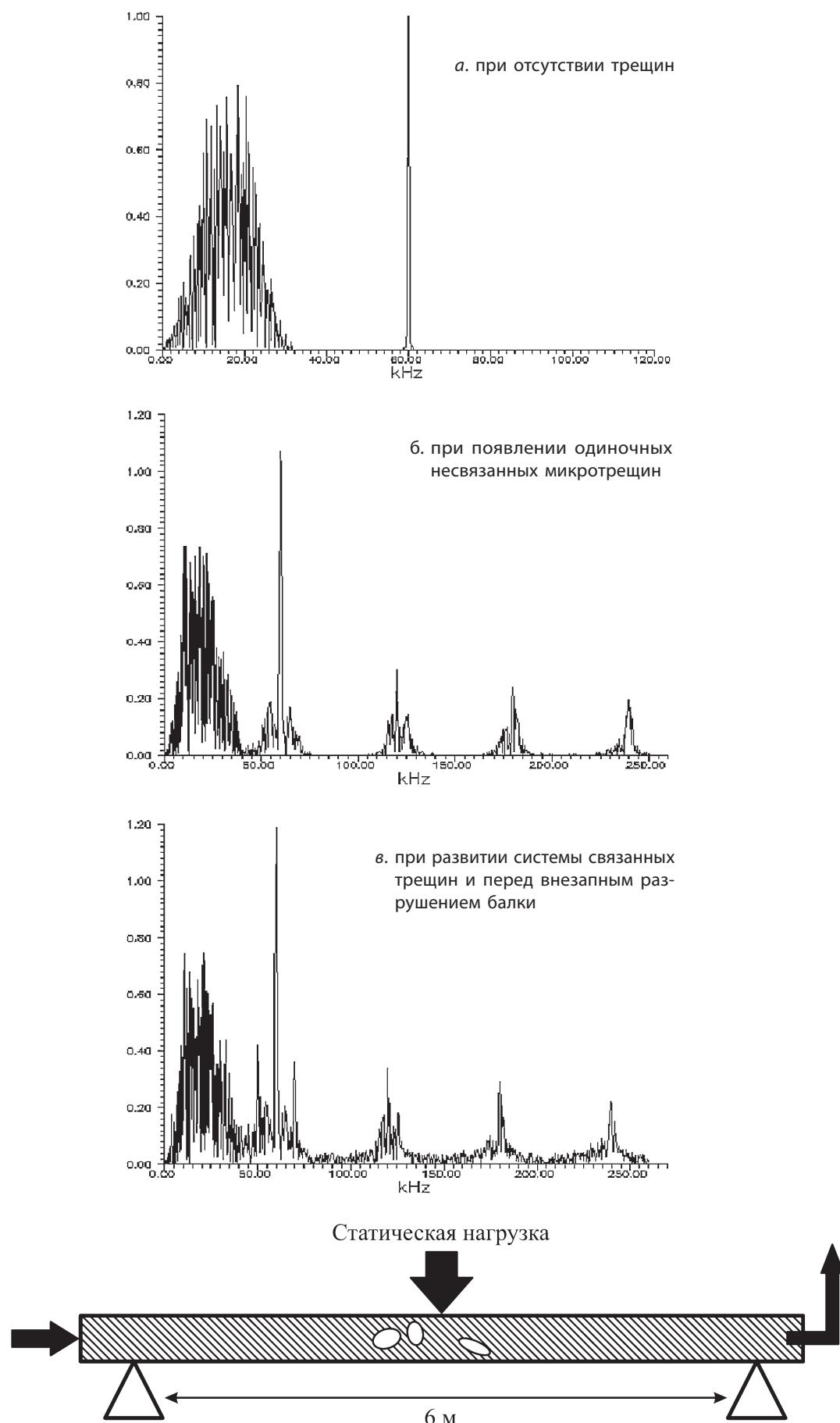
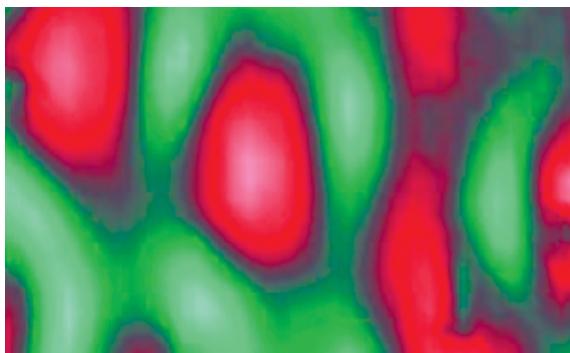


Рис. 13. Нелинейные взаимодействия широкополосного шума и монохромной волны на разных уровнях развития трещин в железобетонной балке



Изображение поверхности участка плиты, колеблющейся на частоте 20 кГц



Изображение дефекта, расположенного на глубине под поверхностью плиты, полученное на частоте седьмой акустической гармоники (140 кГц). Высокий контраст достигнут за счет того, что процесс нелинейной генерации седьмой гармоники происходит только на самом дефекте и поэтому шумовой фон отсутствует

**Рис. 14.** Визуализация объемной трещины на частоте седьмой гармоники

140 кГц, где помехи от линейных рассеивателей (в том числе отражения от поверхности тела) отсутствуют.

**2.2.** Необходимо выделить также результаты использования методов нелинейной диагностики в строительной индустрии. Начало этой деятельности относится к концу 80-х годов. Группа В.А. Робсмана (Научно-исследовательский институт транспортного строительства ЦНИИС) работала в Армении в связи с сооружением тоннеля Севан–Арпа. В это время произошло катастрофическое Спитакское землетрясение, повлекшее многочисленные разрушения и жертвы. Ученых попросили провести акустическую диагностику поврежденных зданий и дать заключение о том, какие здания можно восстановить, а какие следует разрушить в целях безопасности. В процессе ультразвукового «просвечивания» ключевых элементов (балок, несущих стен, перекрытий) выяснилось, что акустические спектры претерпевают искажения тем более сильные, чем сильнее повреждена конструкция. Позднее эмпирически установленным признаком было дано объяснение, и в настоящее время «нелинейные» прогнозы стали весьма достоверными. ЦНИИС использовал методы нелинейной диагностики при строительстве сооружений 3-го транспортного кольца в Москве, при реконструкции и реставрации архитектурно-исторических памятников, строительстве метрополитенов, обследовании энергетических установок с целью разработки проектов усиления конструкции и сейсмозащиты, для диагностики дефектов пролетных строений и опор больших и внеklassных мостов (более 30) для оценки фактической грузоподъемности и проектов реконструкции.

### 3. 0 нелинейных моделях

**3.1.** Число математических моделей, используемых к настоящему времени при решении задач нелинейной акустики, очень велико. Имеет смысл указать только на простейшие «базовые» модельные уравнения с целью обратить внимание на их специфику, а также связь с другими моделями, используемыми в физике нелинейных волн.

Общее одномерное уравнение, описывающее распространение расходящихся и сходящихся волн (рупоры, концентраторы, лучевые трубы в приближении нелинейной геометрической акустики) имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{p}{2} \frac{d}{dx} \ln S(x) - \frac{\epsilon}{c_0^3 \rho_0} p \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} = 0. \quad (18)$$

Здесь  $S(x)$  – площадь сечения трубы,  $\tau = t - x/c$ . Важные частные случаи: при  $S = \text{const}$  это уравнение переходит в уравнение Бюргерса для плоских волн,  $S \sim x$  соответствует цилиндрическим,  $S \sim x^2$  – сферически-симметричным волнам. Диссипация (вторая производная) связана с эффектами вязкости и теплопроводности. Для учета потерь за счет рассеяния на мелких неоднородностях используется аналогичное уравнение с 4-й производной [20].

Интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\epsilon}{c_0^3 \rho_0} p \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{m}{2c_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\tau} K(\tau - \tau') \frac{\partial p}{\partial \tau'} d\tau' = 0 \quad (19)$$

описывает нелинейные волны в наследственных средах. Важный случай  $K(t) = \exp(-t/T)$  соответствует

релаксирующей среде, для биотканей используются степенные ядра, для расплавов и сильно вязких жидкостей – модели с несколькими временами релаксации.

Базовым уравнением для интенсивных акустических пучков является уравнение ХЗК (Хохлова–Заболотской–Кузнецова):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^3 \rho_0} p \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right] = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} p. \quad (20)$$

Здесь  $\Delta_{\perp}$  – оператор Лапласа, действующий на координаты в поперечном сечении пучка. Общая конструкция уравнения дифрагирующих пучков такова:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\hat{\Pi}(p)] = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} p,$$

Здесь  $\hat{\Pi}(p) = 0$  – соответствующее уравнение для плоских волн (например, любое из первых двух уравнений этого раздела – (18), (19)). Разумеется, во всех уравнениях квадратичная нелинейность может быть заменена на член более общего вида  $\gamma \delta f(p) / \partial t$  и даже на интегральный нелинейный член типа (16).

## Часть 2. МЕДЛЕННЫЕ ВОЛНЫ В ГРАНУЛИРОВАННОЙ СРЕДЕ, СОДЕРЖАЩЕЙ ЖИДКОСТЬ И ГАЗ

### 1. Нелинейные свойства гранулированной среды

Известно, что гранулированная среда имеет хорошо выраженные нелинейные свойства. Наряду с обычными нелинейными эффектами – генерацией гармоник и волн комбинационных частот, уширением шумовых спектров – в таких структурах наблюдаются явления, необычные с точки зрения классической теории нелинейных волн [21]. К ним могут быть отнесены прямая (минуя каскад промежуточных гармоник) генерация гармоник с очень высокими номерами; многократное деление частоты и эффективная генерация низкочастотного спектра; появление выделенных полос пропускания, обеспечивающих прохождение через среду «доминантных» частот.

Механизмы нелинейности могут быть различными. Основные из них:

- Структурная – Герцевская – нелинейность контактов между зернами (гранулами) среды (см. рис. 5).
- Геометрическая (кинематическая) нелинейность, связанная с конвективным членом в уравнении движения сплошной среды. Она может проявиться при обтекании зерен флюидами (см. рис. 8).
- Физическая нелинейность газовых пор, проявляющаяся при их сильном деформировании (нелинейность типа VP, см. раздел 1.2.1 части 1).

4. «Хлопающая» нелинейность, возникающая благодаря тому, что в фазе разрежения частицы могут свободно отдаляться друг от друга (см. рис. 7).

Известны модели пористых сред, позволившие решать множество важных задач. Например, модель Био [22] описывает важный эффект – существование двух различных волновых мод. Одна из них («каркасная» мода) бежит по структуре соприкасающихся твердых гранул. Вторая возникает за счет сжимаемости среды в порах. Эта модель усовершенствована Николаевским [23].

Однако универсальный феноменологический вывод уравнений, наряду с очевидными преимуществами перед «микроскопическим» выводом, не гарантирует учета всех деталей и, следовательно, адекватность общей модели данной конкретной среды.

### 2. Описание модели среды и основные уравнения

Рассмотрим пористую среду, содержащую газовые полости и тонкие слои жидкости (пленки) между гранулами. Такую структуру имеет влажный песок, а также некоторые виды почв и скальных пород.

Моделью этой среды может служить цепочка связанных резонаторов Гельмгольца, в горле которых находится столбик жидкости. В отличие от предыдущих работ [24], здесь относительное изменение объема полостей резонаторов не предполагается малым, то есть исследуются колебания, в которых может проявляться нелинейность [25]. Нелинейные колебания одиночного резонатора Гельмгольца изучены в работах [9, 26].

Система дифференциально-разностных уравнений для цепочки имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_1 l \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \xi_n}{\partial t} - v \frac{\partial^2 \xi_n}{\partial y^2} \right) &= p_{n-1} - p_n, \\ p_n &= -c_0^2 \rho_0 \frac{S}{V_0} (\xi_{n+1} - \xi_n) + \varepsilon c_0^2 \rho_0 \frac{S^2}{V_0^2} (\xi_{n+1} - \xi_n)^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Первое из них – уравнение движения жидкостного слоя, учитывающее кинематическую вязкость  $v = \eta / \rho_1$ , где  $\rho_1$  – плотность жидкости,  $\eta$  – коэффициент ее сдвиговой вязкости. Второе уравнение есть следствие адиабатического уравнения состояния газа, у которого  $c_0$ ,  $\rho_0$ ,  $\varepsilon$  – равновесная скорость звука, плотность и нелинейность, причем

$$c_0^2 = \gamma \frac{P_0}{\rho_0}, \quad \varepsilon = \frac{\gamma + 1}{2},$$

$P_0$  – равновесное (в отсутствие волны) давление газа в полости. Другие обозначения:  $l$ ,  $S$  – длина столбика жидкости и его поперечное сечение,  $V_0$  – равновесный объем воздушной полости. Разумеется, реальная гранулированная среда сильно отличается от показанной на рис. 15 идеализированной модели

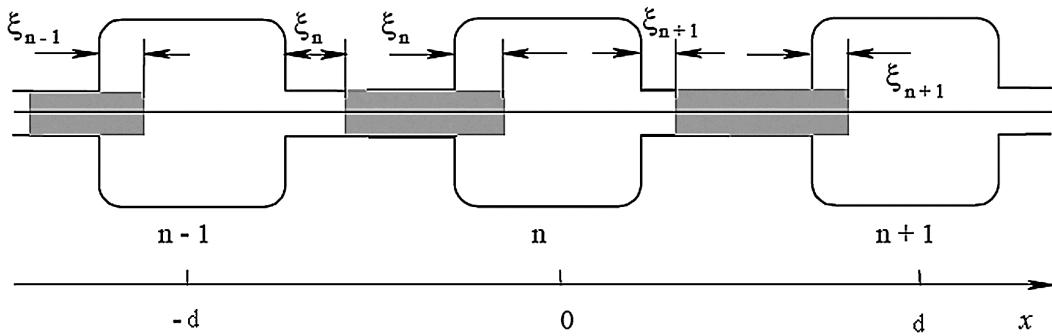


Рис. 15. Цепочка резонаторов Гельмгольца

с регулярным расположением идентичных элементов цепочки. Поэтому под перечисленными выше геометрическими параметрами нужно понимать их некие усредненные значения, а соответствующие численные оценки считать достоверными лишь по порядку величины.

### 3. Колебания отдельных фрагментов цепочки и внутренние резонансы

Прежде, чем переходить к рассмотрению волновых процессов в связанных резонаторах, рассмотрим изолированные колебания отдельных элементов.

**3.1. Колебания единичной полости.** Простейшим структурным элементом является резонатор Гельмгольца с номером  $n$ , изображенный на рис. 16.

Изолированные колебания возможны при следующих условиях: горло резонатора открыто и слева от него  $p_{n-1} = 0$ ; столбик жидкости справа зафиксирован ( $\xi_{n+1} = 0$ ) и двигаться не может. Колебания под действием упругой силы, возникающей при деформировании полости с номером  $n$ , совершают лишь левый столбик, то есть  $p_n \neq 0$ ,  $\xi_n \neq 0$ . Эти колебания описываются уравнением, следующим из системы (21):

$$\rho_1 l \frac{\partial^2 \xi_n}{\partial t^2} + c_0^2 \rho_0 \frac{S}{V_0} \xi_n + \varepsilon c_0^2 \rho_0 \frac{S^2}{V_0^2} \xi_n^2 = v \rho_1 l \frac{\partial^3 \xi_n}{\partial t \partial y^2}. \quad (22)$$

Удобно ввести следующие обозначения:

$$\omega_0^2 = c_0^2 \frac{\rho_0}{\rho_1 V_0 l} S, \quad \varepsilon_* = \varepsilon \xi_A \frac{S}{V_0}, \quad C = \frac{\xi_n}{\xi_A}, \quad (23)$$

где  $\xi_A$  – характерное значение амплитуды колебаний. В этих обозначениях уравнение (22) примет вид

$$\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + \omega_0^2 C + \varepsilon_* \omega_0^2 C^2 = v \frac{\partial^3 C}{\partial t \partial y^2}. \quad (24)$$

Если пренебречь трением, описываемым правой частью уравнения (24), получим обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее колебания

с квадратичной нелинейностью. Нетрудно видеть, что величина  $\omega_0$  есть собственная частота линейных колебаний малой амплитуды. Обыкновенное уравнение второго порядка один раз интегрируется:

$$\dot{C}^2 = D^2 - C^2 - \frac{2}{3} \varepsilon_* C^3. \quad (25)$$

Здесь точкой обозначена производная по нормированному времени  $\omega_0 t$ , а  $D^2$  – положительная константа интегрирования. Фазовая плоскость для уравнения (25) качественно изображена на рис. 17.

Колебания малой амплитуды, которым на рис. 17 соответствуют эллиптические траектории с малыми размерами полуосей, происходят с частотой  $\omega_0$ . С ростом амплитуды размеры замкнутых траекторий на фазовой плоскости увеличиваются, их исходная эллиптическая форма искажается. Профиль периодических колебаний во времени содержит высшие гармоники, а основная частота уменьшается по сравнению со своим «линейным» значением  $\omega_0$ . Форма этих колебаний выражается через эллиптические функции Якоби весьма сложным образом и здесь не приводится. Наконец, движению по сепаратрисе (значение  $D^2 = 1/(3\varepsilon_*)$  в уравнении (25)) на фазовой плоскости отвечает импульсное возмущение, имеющее форму «солитона» [27]:

$$\xi = \frac{3V_0}{2\varepsilon S} \left[ \cosh^{-2}(\omega_0(t-t_0)) - \frac{2}{3} \right]. \quad (26)$$

Движение (6) выглядит следующим образом. Столбик жидкости при  $t \rightarrow -\infty$  был отклонен влево на величину  $\xi_{MIN} = -V_0 / (\varepsilon S)$ . С ростом времени стол-

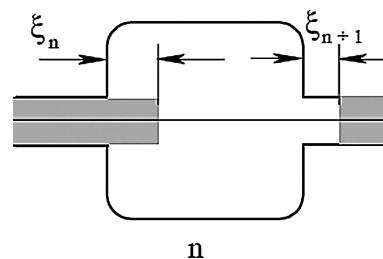
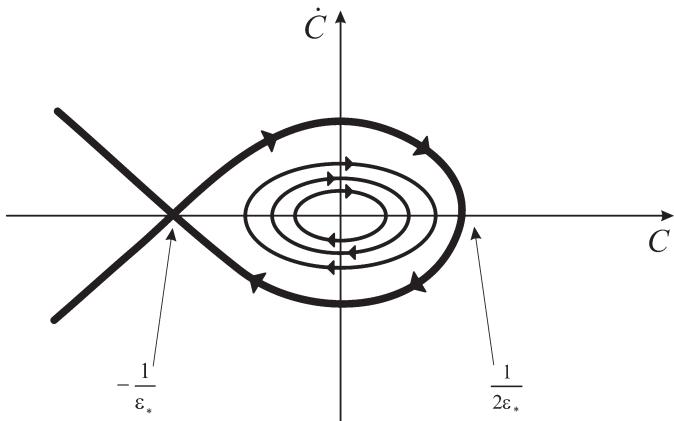


Рис. 16. Колебания в отдельном резонаторе



**Рис. 17.** Участок фазовой плоскости для уравнения (25). Тонкие линии отвечают периодическим колебаниям. Толстая петля – сепаратриса

бик начинает двигаться вправо, смещение проходит через максимум  $\xi_{MAX} = V_0 / (2\varepsilon S)$  и вновь, при  $t \rightarrow \infty$ , стремится к исходному значению  $\xi_{MIN}$ .

Ясно, что в процессе нелинейных колебаний с ростом амплитуды происходит уширение спектра в область низких частот  $\omega < \omega_0$ .

Затухание колебаний, происходящее из-за вязкого трения жидкости, производится способом, описанным в следующем разделе для всей цепочки. Это уравнение оказывается интегро-дифференциальным.

**3.2. Колебания жидкого столба между двумя полостями.** Пусть теперь единственный столбик жидкости совершает колебания между полостями с номером  $n$  и  $n-1$ , изображенными на рис. 18.

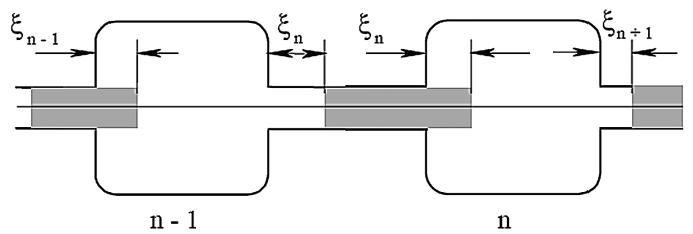
В остальных полостях сохраняется равновесное давление; другие жидккие элементы зафиксированы. В уравнениях (21) нужно считать отличными от нуля лишь переменные  $p_{n-1}$ ,  $p_n$ ,  $\xi_n$ . При этом получается уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi_n}{\partial t^2} + 2\omega_0^2 \xi_n = v \frac{\partial^3 \xi_n}{\partial t \partial y^2}, \quad (27)$$

Заметим, что собственная частота этих колебаний в  $\sqrt{2}$  раз больше, чем частота колебаний одиночного резонатора Гельмгольца (22). Кроме того, в отличие от уравнения (22), в уравнении (27) отсутствует нелинейный член. Очевидно, что рассмотренный тип колебаний симметричен относительно изменения направления смещения. Следовательно, квадратичная нелинейность здесь действительно не может проявляться. Низшей по порядку будет кубическая нелинейность. Если ее учесть, получится уравнение типа (24):

$$\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + 2\omega_0^2 C - \beta_* \omega_0^2 C^3 = v \frac{\partial^3 C}{\partial t \partial y^2}.$$

Здесь мы считаем  $\beta_* > 0$  – сжимаемость увеличивается с ростом деформации; именно в этом случае



**Рис. 18.** Колебания жидкости между двумя полостями

кубическая нелинейность привносит интересные качественные особенности. В отсутствие трения это уравнение интегрируется и из него получается уравнение первого порядка (сравните с (25)):

$$\dot{C}^2 = D^2 - 2C^2 + \frac{\beta_*}{2} C^4.$$

Фазовая плоскость для этого уравнения изображена на рис. 19. Внутри сепаратрисы лежат замкнутые траектории, отвечающие периодическим колебаниям. Движению по сепаратрисе отвечает значение константы  $D^2 = 2/\beta_*$ . Соответствующее решение имеет вид

$$C = \pm \sqrt{\frac{2}{\beta_*}} \tanh(\omega_0(t - t_0)).$$

Знак «плюс» отвечает переходу из точки  $C = -\sqrt{2/\beta_*}$  (при  $t = -\infty$ ) в точку  $C = \sqrt{2/\beta_*}$  (при  $t = +\infty$ ). Знак «минус» соответствует обратному переходу. Таким образом, вместо «солитона» (6) формируется движение типа «кинк».

Таким образом, нелинейный отклик отдельных пор или их простых комбинаций может иметь разнообразные формы. Переходим теперь к рассмотрению всей цепочки.

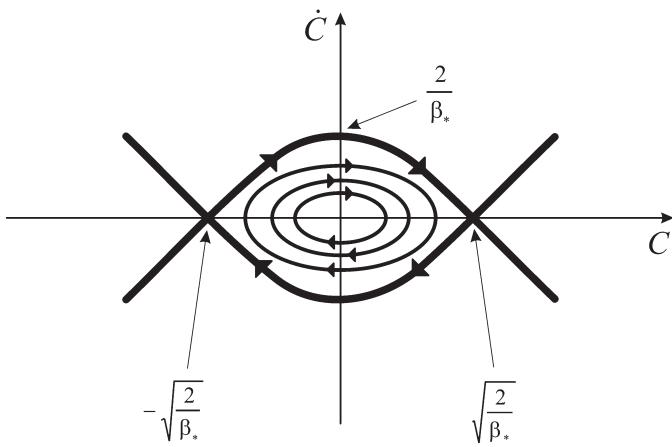
#### 4. Вывод дисперсионного уравнения для цепочки

Рассмотрим вначале гармонические колебания малой амплитуды, считая, что в системе уравнений (1) акустическое давление и смещение изменяются во времени по гармоническому закону  $\sim \exp(-i\omega t)$ . Тогда уравнение (21) колебаний слоя примет вид

$$-\omega^2 \xi_n + i\omega v \frac{\partial^2 \xi_n}{\partial y^2} = \frac{P_{n-1} - P_n}{\rho_l l} \equiv F. \quad (28)$$

Решение уравнения (28) с граничными условиями равенства нулю смещений на границах  $\xi_n(y = \pm a) = 0$  имеет вид

$$\xi_n = -\frac{F}{\omega^2} \left[ 1 - \frac{\exp(\beta(1-i)y) + \exp(-\beta(1-i)y)}{\exp(\beta(1-i)a) + \exp(-\beta(1-i)a)} \right]. \quad (29)$$



**Рис. 19.** Участок фазовой плоскости для уравнения с кубической нелинейностью. Тонкие линии отвечают периодическим колебаниям. Толстая петля – сепаратриса

Здесь посредством  $\beta = \sqrt{\omega/2v}$  обозначена обратная толщина акустического пограничного слоя.

Поскольку нас не интересует распределение смещений по толщине жидкой пленки, проведем усреднение уравнения колебаний по сечению:

$$\bar{\xi}_n = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \xi_n(y) dy.$$

В дальнейшем черту над усредненным смещением будем опускать. Уравнение (21) примет вид:

$$-\omega^2 \bar{\xi}_n + i\omega \frac{v}{2a} \left. \frac{\partial \xi_n}{\partial y} \right|_{-a}^a = F. \quad (30)$$

Второй член в левой части этого уравнения вычисляется с помощью решения (29):

$$\left. \frac{\partial \xi_n}{\partial y} \right|_{-a}^a = 2F(1-i) \frac{\beta \sinh(\beta a) \cosh(\beta a) - i \sin(\beta a) \cos(\beta a)}{\omega^2 \cosh^2(\beta a) - \sin^2(\beta a)}. \quad (31)$$

Подставляя (31) в (30), получаем для гармонических колебаний слоя (22) следующее соотношение:

$$-\omega^2 \bar{\xi}_n = \left[ 1 - \frac{(1+i)}{2(\beta a)} \frac{\sinh(\beta a) \cosh(\beta a) - i \sin(\beta a) \cos(\beta a)}{\cosh^2(\beta a) - \sin^2(\beta a)} \right] \times \frac{p_{n-1} - p_n}{\rho_1 l}. \quad (32)$$

Добавим к нему линеаризованное уравнение состояния

$$p_n = -c_0^2 \rho_0 \frac{S}{V_0} (\xi_{n+1} - \xi_n). \quad (33)$$

Из системы разностных соотношений (32), (33) найдем закон дисперсии, положив

$$\begin{pmatrix} p_n \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_n \\ S_n \end{pmatrix} \exp(iknd),$$

где  $d$  – пространственный период цепочки. Для комплексных амплитуд  $Q_n, S_n$  из системы уравнений (32), (33) получим

$$\begin{aligned} \omega^2 S_n + \frac{D}{\rho_1 l} [\exp(-ikd) - 1] Q_n &= 0, \\ c_0^2 \rho_0 \frac{S}{V_0} [\exp(ikd) - 1] S_n + Q_n &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь для краткости буквой  $D = D(\omega)$  обозначено выражение, стоящее в формуле (32) в квадратных скобках.

Дисперсионное уравнение находится из условия равенства нулю детерминанта системы (34). Оно имеет вид

$$\frac{\omega^2}{D(\omega)} = 4\omega_0^2 \sin^2 \left( \frac{kd}{2} \right). \quad (35)$$

## 5. Случаи низких и высоких частот, диффузионное и волновое уравнения

Рассмотрим теперь различные частные случая, в которых дисперсионное уравнение (35) упрощается.

**5.1. Случай  $\beta a \ll 1$ .** Пусть толщина слоя жидкости мала по сравнению с толщиной пограничного слоя. Это означает, что малой величиной является произведение параметров  $\beta a$ . Разлагая выражение  $D = D(\omega)$  в ряд по малым значениям  $\beta a$  с сохранением членов порядка  $(\beta a)^3$ , получим

$$D \approx -i \frac{2}{3} (\beta a)^2 = -i \frac{\omega}{3v} a^2. \quad (36)$$

В этом предельном случае дисперсионное уравнение (35) примет вид

$$i\omega = \frac{4}{3} \frac{a^2}{v} \omega_0^2 \sin^2 \left( \frac{kd}{2} \right). \quad (37)$$

Видно, что частота  $\omega$  является мнимой величиной, которая по абсолютному значению не превосходит некоторого максимального значения:

$$|\omega| < \frac{4}{3} \frac{a^2}{v} \omega_0^2.$$

Если длина акустической волны много больше пространственного периода цепочки, синус в формуле (37) можно (при  $kd \ll 1$ ) приближенно заменить значением его аргумента. Этой замене соответствует предельный переход от дискретной цепочки к континуальной модели. Как нетрудно видеть, процесс распространения возмущений при этом описывается уравнением диффузии:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad \kappa = \frac{a^2 d^2}{3v} \omega_0^2. \quad (38)$$

Итак, в случае очень тонкого слоя волновой процесс такого типа в рассматриваемой среде существовать не может – пленки жидкости слишком «загустили». С уменьшением вязкости  $\nu$  подвижность жидкости усиливается, и коэффициент диффузии  $\kappa$  растет.

**5.2. Случай  $\beta a \gg 1$ .** Пусть теперь толщина слоя жидкости велика по сравнению с толщиной пограничного слоя. Этот случай соответствует высоким частотам колебаний среды; при этом произведение параметров  $\beta a$  есть большая величина, и

$$D \approx 1 - \frac{1+i}{2(\beta a)} = 1 - \frac{1+i}{2} \sqrt{\frac{2\nu}{\omega a^2}}. \quad (39)$$

Дисперсионное уравнение (35) с учетом (39) примет вид

$$\omega^2 + \frac{1+i}{2} \sqrt{\frac{2\nu}{a^2}} \omega^{3/2} = 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{kd}{2}\right). \quad (40)$$

При значении  $\beta a \rightarrow \infty$  дисперсионное уравнение (40) описывает незатухающую волну, максимальная частота которой

$$\omega = \omega_{\max} = 2\omega_0 \quad (41)$$

достигается для предельно короткой волны, длина которой равна двум периодам цепочки ( $\lambda = 2d$ ). Учет конечности  $\beta a$ , как видно из формулы (40), немного уменьшает значение  $\omega_{\max}$  и приводит к появлению малой мнимой части, ответственной за затухание. В континуальном пределе  $kd \ll 1$  дисперсионному уравнению (40) можно сопоставить следующее волновое уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \sqrt{\frac{\nu}{\pi a^2}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^t \xi(t', x) \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}} &= c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \\ c^2 &= c_0^2 \frac{\rho_0 d^2}{\rho_1 l} \frac{S}{V_0}. \end{aligned} \quad (42)$$

Полезно также, имея в виду дальнейшее обобщение на нелинейные задачи, наряду с уравнением (42) выписать соответствующее ему уравнение эволюционного типа. Для этого следует воспользоваться методом медленно изменяющегося профиля [27, 28] и, считая интегральный член малым по сравнению с двумя другими членами уравнения (42), с помощью стандартной процедуры упрощения, перейти от переменных  $t, x$  к новым независимым переменным  $\tau = t - x/c$ ,  $x_1 = \mu x$ . Здесь  $\mu$  – малый параметр, указывающий на «медленность» искажения формы профиля волны по мере ее распространения. Упрощая уравнение (42) с помощью стандартной процедуры, получим

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{\nu}{\pi a^2}} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\infty \xi(\tau - \tau', x) \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau'}} = 0. \quad (43)$$

С учетом квадратично-нелинейного члена эволюционное уравнение примет вид [30]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c^2} u \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{\nu}{\pi a^2}} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\infty u(\tau - \tau', x) \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau'}} = 0.$$

Здесь  $u = \partial \xi / \partial \tau$  – колебательная скорость в акустической волне.

Решение уравнения (43) для гармонической волны таково:

$$\xi = \xi_0 \exp\left(-i\omega\tau + i \frac{\sqrt{2\omega\nu}}{4ca} x\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{2\omega\nu}}{4ca} x\right). \quad (44)$$

Видно, что учет трения немного изменяет скорость распространения волны и приводит к ее затуханию. Коэффициент затухания при этом растет с частотой как  $\sqrt{\omega}$ .

Заметим, что интегро-дифференциальные уравнения типа (42), (43) использовались ранее для описания различных проблем: трения в горле резонатора Гельмгольца [9], а также трения в мышечных волокнах [29] и в коллоидных растворах наночастиц [30].

**5.3. Общий случай** – значения  $\beta a$  произвольны, но рассматривается континуальный предел. Дисперсионное уравнение (32) запишется так:

$$\omega^2 = c^2 k^2 D(\omega).$$

В расчетах удобна другая форма этого выражения, справедливая для волны, бегущей в положительном направлении оси  $x$ :

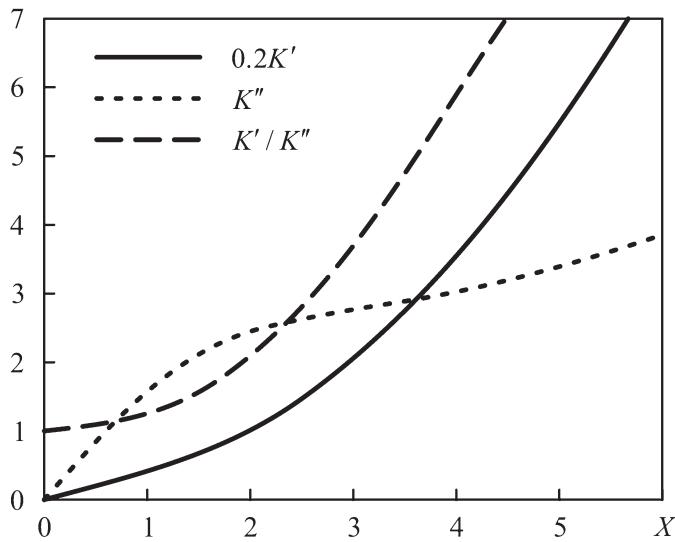
$$\begin{aligned} \frac{ca^2}{2\nu} k &\equiv \frac{1}{4} K(\beta a) = (\beta a)^2 \times \\ &\times \left[ 1 - \frac{(1+i)}{2(\beta a)} \frac{\sinh(\beta a) \cosh(\beta a) - i \sin(\beta a) \cos(\beta a)}{\cosh^2(\beta a) - \sin^2(\beta a)} \right]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (45)$$

Для простоты обозначим  $2\beta a \equiv X$  и перепишем формулу (45) следующим образом:

$$\begin{aligned} K &= K' + iK'' = \\ &= X^2 \left[ 1 - \frac{1}{X} \frac{\sinh X + \sin X}{\cosh X + \cos X} - \frac{i}{X} \frac{\sinh X - \sin X}{\cosh X + \cos X} \right]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (46)$$

На рис. 20 изображены действительная  $K'$  и мнимая  $K''$  части нормированного волнового числа  $K$  как функции параметра  $X = 2\beta a$ , который пропорционален корню из частоты. Видно, что при малых значениях  $X$  мнимая часть  $K''$  равна действительной части  $K'$ :

$$K = \sqrt{3}(1-i)X. \quad (47)$$



**Рис. 20.** Действительная ( $K'$ ) и мнимая ( $K''$ ) части комплексного волнового числа  $K$  и их отношение в зависимости от  $X = 2\beta a$

Это означает, что колебания сильно поглощаются (на расстояниях, меньших или порядка длины волны) и не могут распространяться в среде в виде бегущей волны. При увеличении  $X$  действительная часть становится гораздо больше мнимой,

$$K = X^2 + (1+i)X/2, \quad (48)$$

и можно говорить о том, что в среде возникают бегущие волны. Критерием возникновения бегущих волн является малость затухания на длине волны:

$$k''\lambda \ll 1, \quad 2\pi K''(X)/X^2 \ll 1. \quad (49)$$

Подставляя в (49) мнимую часть выражения (48), получим критерий перехода  $X \gg \pi$ . Условно можно принять более слабое неравенство  $X > 2\pi$ , отвечающее затуханию в « $e$ » раз на расстоянии  $x = 2\lambda$ .

С ростом частоты затухание за счет вязкого трения при колебаниях пленок жидкости между зернами уменьшается и им можно пренебречь. Однако при этом становятся существенными иные механизмы трения, а также рассеяние волн на гранулах. Чтобы учесть эти механизмы потерь, нужно обобщить рассмотренную выше модель.

## 6. Оценки предельных частот и скоростей распространения волн

Оценим максимально возможную частоту и скорость распространения медленной волны во влажной гранулированной среде. Пусть размер гранул – порядка 1 мм, при этом толщина жидкой пленки  $a$  – порядка 0,1 мм. Следовательно, длина пленки  $l \sim 1$  мм

и ее площадь  $S \sim 0,2 \text{ мм}^2$ . Объем пузырька воздуха должен быть в несколько раз меньше объема гранулы, например, на порядок:  $V_0 \sim 0,1 \text{ мм}^3$ . Скорость звука в воздухе  $c_0 = 330 \text{ м/с}$ , отношение плотностей воздуха и воды  $\rho_0 / \rho_1 = 1.3 \cdot 10^{-3}$ . Подставляя эти численные значения в формулу (41), получим оценку

$$f_{\max} = \frac{c_0}{2\pi} \left( \frac{4\rho_0 S}{\rho_1 l V_0} \right)^{1/2} \sim \frac{3,3 \cdot 10^4}{2\pi} \left( 4 \cdot 1,3 \cdot 10^{-3} \frac{2 \cdot 10^{-3}}{10^{-1} \cdot 10^{-4}} \right)^{1/2} \approx 0,54 \cdot 10^4 \text{ Гц} = 5,4 \text{ кГц}$$

Для крупных гранул размером порядка 1 см и при тех же пропорциях между геометрическими параметрами найдем  $f_{\max} \sim 1.7 \text{ кГц}$ . Напомним, что эти частоты соответствуют волнам, длина которых равна двум пространственным периодам структуры. Соответствующие фазовые скорости распространения волн  $c = 2d f_{\max}$  будут порядка  $c \sim 1,1 \cdot 10^3 \text{ см/с}$  и  $c \sim 3,4 \cdot 10^3 \text{ см/с}$ . Следовательно, рассматриваемые волны – медленные; как видно из оценок, их скорость порядка десятков м/с, то есть гораздо меньше скорости звука как в воздухе, в воде, так и в плотных породах. Групповая скорость для предельных частот, как видно из (41), равна нулю.

Для низких частот фазовая и групповая скорости одинаковы и определяются формулой (42). Для рассмотренной выше «мелкозернистой» среды оценка дает:

$$c = c_0 \sqrt{\frac{\rho_0 d^2 S}{\rho_1 l V_0}} \sim 3,3 \cdot 10^4 \left( 1,3 \cdot 10^{-3} \frac{4 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{10^{-1} \cdot 10^{-4}} \right)^{1/2} \approx 3,4 \cdot 10^3 \text{ см/с.}$$

Для «крупнозернистой» среды получается та же оценка:  $c \sim 3,4 \cdot 10^3$ . Таким образом, во всем возможном диапазоне частот волны во влажной пористой среде являются медленными. К тому же, как показано выше, при низких частотах  $f < f_{\min}$ , то есть при

$$\beta a = a \sqrt{\pi f / v} \ll 1, \quad f < f_{\min} = \frac{\eta}{\pi a^2 \rho_1}$$

волна превращается в диффузионный колебательный процесс и практически не распространяется. Для рассмотренных выше двух сред и сдвиговой вязкости  $\eta \sim 10^{-2}$  паз имел соответственно

$$f_{\min} \approx 130 \text{ Гц}, \quad f_{\min} \approx 1,3 \text{ Гц}.$$

Таким образом, влажная зернистая среда играет роль фильтра, пропускающего на заметные расстояния волны определенных частот, лежащих в диапазоне  $f_{\min} < f < f_{\max}$ .

Наличие «доминантных» частот отмечено в экспериментах Вильчинской и теоретически – в работах Николаевского [23, 31]. Согласно этим данным, доминантные частоты составляют десятки герц, что

меньше значений, следующих из нашей модели. Эти интересные вопросы, связанные с общей проблемой наличия разнообразных резонансов в геофизических системах [32–34], выходят за рамки настоящей статьи.

## 7. Нелинейные медленные волны

Если длина волны велика по сравнению с размером гранул, можно в системе дифференциально-разностных уравнений (21) перейти к континуальному приближению, заменив разностные соотношения производными по продольной координате

$$p_{n-1} - p_n \approx -d \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \xi_{n+1} - \xi_n \approx d \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Система (21) при этом сводится к одному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = v \frac{\partial^3 \xi}{\partial y^2 \partial t} - \varepsilon c^2 \frac{Sd}{V_0} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2. \quad (50)$$

Здесь  $d$  – период цепочки, а эффективная скорость звука  $c$  дается выражением (42). Пользуясь методом медленно изменяющегося профиля [1, 27, 28] и рассматривая только волну, бегущую примерно со скоростью  $c$  в положительном направлении оси  $x$ , получим уравнение эволюционного типа

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\varepsilon Sd}{c^2 V_0} u \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{v}{2c} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (51)$$

Здесь, как и ранее,  $\tau = t - x/c$ ,  $u = \partial \xi / \partial \tau$  – колебательная скорость частиц в рассматриваемой структурно-неоднородной среде. Если в однородной сплошной среде перед нелинейным членом в эволюционном уравнении типа (51) присутствовал коэффициент  $\varepsilon / c_0^2$  [1, 27], то теперь его вид изменился. Отношение нового и старого коэффициентов  $(c_0^2 / c^2)(Sd / V_0)$  – большая величина. Это следует из оценок (см. раздел 6); они показали, что  $c_0^2 / c^2 \gg 1$ . Таким образом, в поле медленных волн нелинейность проявляется заметно сильнее.

Для качественного анализа нелинейного искажения бегущей волны предположим, что поперечный профиль имеет вид, характерный для течения Пуазейля:  $u \sim (1 - y^2 / a^2)$ . При этом из (51) для поля волны вблизи оси следует

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha u \frac{\partial u}{\partial \tau} = -\delta u, \quad \alpha = \frac{\varepsilon Sd}{c^2 V_0}, \quad \delta = \frac{v}{2ca^2}. \quad (52)$$

Решение уравнения (52) для волны, исходная форма которой  $u(x=0, t) = \Phi(t)$ , имеет вид

$$u e^{\delta x} = \Phi \left[ \tau + \frac{\alpha}{\delta} u e^{\delta x} \left( 1 - e^{-\delta x} \right) \right]. \quad (53)$$

Характерная нелинейная длина – расстояние образования разрыва, как следует из решения (53), равна

$$x_{SH} = -\frac{1}{\delta} \ln \left( 1 - \frac{\delta}{\alpha \omega u_0} \right). \quad (54)$$

Здесь  $\omega, u_0$  – характерные значения частоты и амплитуды исходного сигнала. Для малой вязкости жидкого слоя приближенно имеем

$$x_{SH} \approx \frac{1}{\alpha \omega u_0} \left( 1 + \frac{\delta}{\alpha \omega u_0} \right) = \frac{c^2 V_0}{\varepsilon \omega u_0 S d} + \frac{v}{2ca^2} \left( \frac{c^2 V_0}{\varepsilon \omega u_0 S d} \right)^2. \quad (55)$$

Оценки для тех же параметров среды, что и в разделе 6, для частоты порядка 1 кГц и амплитуды колебаний частиц 10 см/с дают значение длины образования разрыва  $x_{SH} \approx 10^2$  см. При этом оказывается, что оба члена в формуле (55) примерно одного порядка.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе дана классификация типов акустических нелинейностей. Подробно рассмотрена модель гранулированной среды, содержащей слои жидкости и газовые полости. Показано, что сильная сжимаемость приводит к появлению «медленной» моды, скорость распространения которой гораздо меньше скорости звука в жидкости, материале твердых гранул и в газе. Найдено дисперсионное уравнение для дискретной цепочки резонаторов, моделирующей рассмотренную среду. Изучен нелинейный отклик отдельных резонаторов. Показано, что волны низких частот, для которых толщина акустического пограничного слоя больше, чем толщина жидкой пленки, в среде распространяться не могут. Волны более высоких частот распространяются, но существует частота отсечки, определяющая их максимально возможную частоту. В общем случае процессы описываются нелинейными интегро-дифференциальными и дифференциально-разностными уравнениями, которые могут быть проанализированы лишь численными методами. На основе решений упрощенных задач проведены численные оценки.

*Работа выполнена в рамках проектов Программы поддержки фундаментальных исследований №4 Президиума РАН, поддержаны грантами РФФИ и Президентским грантом Ведущих научных школ.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
2. Ландай Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
3. Rudenko O.V. Nonlinear Interactions of Regular and Noise Spectra at the Formation of Intense Radiation By a Piston in a Linear Medium // Acoust. Physics. 1998. V. 44, N 6. P. 786–791.

4. Руденко О.В. Взаимодействия интенсивных шумовых волн // Успехи физ. наук. 1986. Т. 149, № 3.
5. Rudenko O.V. Nonlinear Oscillations of Linearly Deformed Medium in a Closed Resonator Excited by Finite Displacements of Its Boundary // Acoust. Physics. 1999. V. 45, N 3. P. 351–356.
6. Ландау Л.Д., Лишинц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1986.
7. Rudenko O.V., Hedberg C.M. Nonlinear dynamics of grains in a liquid-saturated soil // Nonlinear Dynamics. 2004. V. 35. P. 187–200.
8. Руденко О.В., Чинь Ань Ву. Нелинейные акустические свойства контакта шероховатых поверхностей и возможности акустодиагностики статистических характеристик неровностей // Акуст. журн. 1994. Т. 40, № 4.
9. Руденко О.В., Хирных К.Л. Модель резонатора Гельмгольца для поглощения интенсивного звука // Акуст. журн. 1990. Т. 36, № 3.
10. Работников Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977.
11. Ostrovsky L.A., Johnson P.A. Dynamic nonlinear elasticity in geomaterials // La Rivista del Nuovo Cimento. 2001. V. 24. N 7.
12. Rudenko O.V., Robsman V.A. Nonlinear Processes in Media with an Acoustic Hysteresis and the Problems of Dynamic Interaction between Piles and Earth Foundation // Acoust. Physics. 2004. V. 50, N 6. P. 725–731.
13. Мансфельд А.Д., Рейман А.М. Особенности обнаружения газовых пузырьков в неоднородных нелинейных средах // Ультразвуковая диагностика. Горький: ИПФ РАН, 1983. С. 151–161.
14. Островский Л.А., Сутин А.М. Нелинейные акустические методы диагностики газовых пузырьков в жидкости // Ультразвуковая диагностика. Горький: ИПФ РАН, 1983. С. 139–150.
15. Hedberg C.M., Rudenko O.V. Pulse response of nonlinear layer // J. Acoust. Soc. Am. 2001. V. 110, No.5 (Pt. 1). P. 2340–2350.
16. Робсман В.А. Трансформация акустических спектров в неоднородных твердых средах при нелинейной деформации // Акуст. журн. 1992. Т. 38, № 1. С. 129–143.
17. Shkolnik I., Zaremba L., Krasilnikov V. On structural nonlinear diagnostics of solids and estimation of their strength // Frontiers of Nonlinear acoustics / Ed. by M. Hamilton and D. Blackstock. London: Elsevier, 1990. P. 589–594.
18. Rudenko O.V. Nonlinear methods in acoustic diagnostics // Russian Journal of Nondestructive Testing. 1993. V. 29. N 8. P. 583–589.
19. Буров В.А., Гуринович И.Е., Руденко О.В., Тагунов Т.Я. Reconstruction of the spatial distribution of the nonlinearity parameter and sound velocity in acoustic nonlinear tomography // Acoust. Physics. 1994. V. 40, N 6. P. 816–823,
20. Руденко О.В., Робсман В.А. Уравнение нелинейных волн в рассеивающей среде // Докл. РАН. Физика. 2002. Т. 384, № 6. С. 434–439.
21. Руденко О.В. Гигантские нелинейности структурно-неоднородных сред и основы методов нелинейной акустической диагностики // Успехи физических наук. 2006. Т. 176, № 1. С. 77–95.
22. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solids // J. Acoust. Soc. America. 1956. V. 28. P. 168–186.
23. Nikolaevskii V.N. Geomechanics and Fluidodynamics. Dordrecht: Cluver, 1996.
24. Rudenko O.V., Sobisevich A.L., Sobisevich L.E. Non-Linear Wave Phenomena in a Geophysical Medium, Containing Resonant Structures // EGS-2000. Nice. France. April 25–29, 2000.
25. Rudenko O.V. Nonlinear Standing Waves, Resonance Phenomena, and Frequency Characteristics of Distributed Systems (A Review) // Acoust. Physics. 2009. V. 55, N 1. P. 27–54.
26. Заикин А.А., Руденко О.В. Нелинейная модель резонатора Гельмгольца с подвижной стенкой // Акуст. Журн. 1996. Т. 42, № 3. С. 378–382.
27. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. 2-е изд. М.: Наука, 1990.
28. Novikov B.K., Rudenko O.V., Timoshenko V.I. Nonlinear Underwater Acoustics. Am. Inst. Phys., 1987.
29. Руденко О.В., Сарвазян А.П. Волновая биомеханика скелетной мышцы // Акуст. журн. 2006. Т. 52, № 6. С. 720–732.
30. Лебедев-Степанов П.В., Руденко О.В. О затухании звука в жидкости, содержащей взвешенные частицы микрон- и нанометровых размеров // Акуст. журн. 2009. Т. 55 № 6. С. 706–711.
31. Вильчинская Н.А., Николаевский В.Н. Акустическая эмиссия и спектр сейсмических сигналов // Физика Земли. 1984. № 5. С. 91–100.
32. Собисевич Л.Е., Собисевич А.Л. Волновые процессы и резонансы в геофизике. М.: ОИФЗ РАН, 2001. 297 с.
33. Руденко О.В., Собисевич Л.Е., Собисевич А.Л., Хедберг К.М. Об учете резонансных особенностей геологической среды (горной породы) в прикладных задачах нелинейной геомеханики и акустики // Геофизика и математика: материалы Второй Всероссийской конференции. Пермь, 10–14 декабря 2001. С. 254–261.
34. Собисевич А.Л., Руденко О.В. О резонансных свойствах магматических структур // Акуст. журнал. 2005. Т. 51. Приложение. С. 169–176.

# СОДЕРЖАНИЕ

<i>Ю.Г. Гатинский, Д.В. Рундквист, Г.Л. Владова, Т.В. Прохорова</i> СЕЙСМО-ГЕОДИНАМИЧЕСКИЙ МОНИТОРИНГ ГЛАВНЕЙШИХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ РОССИИ И БЛИЖНЕГО ЗАРУБЕЖЬЯ . . . . .	13
<i>В.И. Осипов, Н.И. Фролова, С.П. Сущев, В.И. Ларионов</i> ОЦЕНКА СЕЙСМИЧЕСКОГО И ПРИРОДНОГО РИСКА ДЛЯ НАСЕЛЕНИЯ И ТЕРРИТОРИЙ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ . . . . .	28
<i>В.И. Величкин, Б.П. Власов, М.В. Шумилин</i> ОСНОВНЫЕ ПРОМЫШЛЕННО-ГЕНЕТИЧЕСКИЕ ТИПЫ УРАНОВЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ БЫВШЕГО СССР И РОССИИ . . . . .	49
<i>С.А. Дмитриев, В.И. Величкин, Б.И. Омельяненко</i> ОБЕСПЕЧЕНИЕ БЕЗОПАСНОЙ ИЗОЛЯЦИИ ЖИДКИХ ОТХОДОВ НИЗКОГО И СРЕДНЕГО УРОВНЕЙ РАДИОАКТИВНОСТИ . . . . .	64
<i>В.И. Величкин, В.И. Мальковский, Н.Н. Тарасов, Ю.П. Диков</i> АНАЛИЗ УСЛОВИЙ МИГРАЦИИ РАДИОНУКЛИДОВ В ГЕОЛОГИЧЕСКОЙ СРЕДЕ В РАЙОНЕ ОЗЕРА КАРАЧАЙ (ЧЕЛЯБИНСКАЯ ОБЛАСТЬ) . . . . .	77
<i>Б.И. Омельяненко, В.И. Величкин, С.В. Юдинцев</i> ПОВЕДЕНИЕ АКТИНИДОВ В УСЛОВИЯХ ДОЛГОСРОЧНОГО ХРАНЕНИЯ И ЗАХОРОНЕНИЯ ОТРАБОТАННОГО ЯДЕРНОГО ТОПЛИВА . . . . .	86
<i>С.В. Юдинцев, Б.И. Омельяненко</i> ГЕОХИМИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ ИЗОЛЯЦИИ ТЕХНЕЦИЯ . . . . .	99
<i>И.Н. Солодов, А.К. Лисицын</i> ПОЛИЭЛЕМЕНТНЫЕ ЭКЗОГЕННЫЕ ЭПИГЕНЕТИЧЕСКИЕ МЕСТОРОЖДЕНИЯ УРАНА: ГЕНЕТИЧЕСКИЕ ТИПЫ И МЕТАЛЛЫ, ИЗВЛЕКАЕМЫЕ СЕРНОКИСЛОТНЫМ ПОДЗЕМНЫМ ВЫЩЕЛАЧИВАНИЕМ . . . . .	109
<i>В.А. Петров, В.В. Полуэктов, Р.М. Насимов, А.А. Бурмистров, С.И. Щукин, Й. Хаммер</i> ИЗУЧЕНИЕ ПРИРОДНЫХ И ТЕХНОГЕННЫХ ПРОЦЕССОВ НА УРАНОВОМ МЕСТОРОЖДЕНИИ В ГРАНИТАХ ДЛЯ ОБОСНОВАНИЯ БЕЗОПАСНОСТИ ДЛИТЕЛЬНОЙ ИЗОЛЯЦИИ ОЯТ . . . . .	124
<i>В.М. Котляков, Л.Н. Васильев, М.Ю. Москалевский</i> БАЛАНС МАССЫ АНТАРКТИЧЕСКОГО ЛЁДНИКОВОГО ПОКРОВА . . . . .	139

<i>Ю.Я. Мачерет, А.Ф. Глазовский, И.И. Лаврентьев</i> ВОДА В ПОЛИТЕРМИЧЕСКИХ И ТЕПЛЫХ ЛЕДНИКАХ . . . . .	152
<i>В.Н. Михаленко, С.С. Кутузов, О.В. Нагорнов, С.А. Тюфлин, И.И. Лаврентьев, С.А. Марченко, В.И. Окопный</i> СТРАТИГРАФИЧЕСКОЕ СТРОЕНИЕ И ТЕМПЕРАТУРНЫЙ РЕЖИМ ФИРНОВО-ЛЕДЯНОЙ ТОЛЩИ НА ЗАПАДНОМ ПЛАТО ЭЛЬБРУСА . . . . .	180
<i>Ю.П. Масуренков, А.Л. Собисевич</i> ЭЛЬБРУССКОЕ ОЛЕДЕНЕНИЕ – ИНДИКАТОР ГЕОТЕРМИЧЕСКОГО И ФЛЮИДНОГО СОСТОЯНИЯ ВУЛКАНА . . . . .	189
<i>А.Н. Хименков, Г.З. Перльштейн, Д.О. Сергеев, А.Н. Власов, В.П. Мерзляков, Ю.В. Халилова</i> ГЕОЭКОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОЦЕНКИ РИСКА ОПАСНЫХ ПРОЦЕССОВ В КРИОЛИТОЗОНЕ . . . . .	205
<i>Е.В. Коротеева, Е.И. Вейсберг, Н.Б. Куянцева, С.А. Лесина</i> ВЛИЯНИЕ КЛИМАТИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ НА ДИНАМИКУ РАСТИТЕЛЬНОГО ПОКРОВА ВОСТОЧНЫХ ПРЕДГОРИЙ ЮЖНОГО УРАЛА . . . . .	213
<i>А.Ю. Кудеярова</i> ТРАНСФОРМАЦИЯ ПРИРОДНЫХ СОРБЦИОННЫХ БАРЬЕРОВ ПРИ ЗАФОСФАЧИВАНИИ КИСЛЫХ ПОЧВ . . . . .	223
<i>И.В. Галицкая, И.А. Позднякова, Л.С. Томс</i> МЕТОДОЛОГИЯ И МЕТОДИКА ПРОГНОЗА И УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОПРИРОДНЫМ ГЕОХИМИЧЕСКИМ РИСКОМ НА УРБАНИЗИРОВАННЫХ ТЕРРИТОРИЯХ . . . . .	239
<i>Л.С. Кучмент, А.Н. Гельфан</i> СОВМЕСТНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ И ДЕТЕРМИНИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ОЦЕНКИ МАШТАБОВ И РИСКА КАТАСТРОФИЧЕСКИХ НАВОДНЕНИЙ НА ОСНОВЕ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ФОРМИРОВАНИЯ СТОКА . . . . .	252
<i>В.В. Адушкин, П.П. Фирстов</i> ОСОБЕННОСТИ ЭКСПЛОЗИВНЫХ ПРОЦЕССОВ ВУЛКАНИЧЕСКИХ ИЗВЕРЖЕНИЙ И ИХ ПРОЯВЛЕНИЕ В ВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ В АТМОСФЕРЕ . . . . .	264
<i>А.Ю. Озеров</i> МЕХАНИЗМ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ФОНТАНИРОВАНИЯ БАЗАЛЬТОВЫХ ВУЛКАНОВ (ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ИССЛЕДОВАНИЯМ И ПРИРОДНЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ) . . . . .	279
<i>О.В. Руденко, А.Л. Собисевич, Л.Е. Собисевич</i> О ФИЗИКЕ АКУСТИЧЕСКИХ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ И МЕДЛЕННЫХ ВОЛНАХ В ГРАНУЛИРОВАННОЙ ФЛЮИДОНАСЫЩЕННОЙ СРЕДЕ . . . . .	299
<i>В.Н. Николаевский</i> ОЧАГ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ – СОБЫТИЯ И ПРЕДВЕСТИКИ УДАРА . . . . .	316
<i>Б.В. Левин, Г.В. Шевченко, В.М. Кайстренко, Т.Н. Ивельская, Т.К. Пинегина, Н.Г. Разжигаева</i> ПРОБЛЕМА ЦУНАМИ: СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ (ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ АСПЕКТ) . . . . .	332
<i>В.А. Семенов, И.И. Мохов, М. Латиф</i> МОДЕЛИРОВАНИЕ КЛИМАТИЧЕСКИХ ИЗМЕНЕНИЙ В РЕГИОНАХ СЕВЕРНОЙ ЕВРАЗИИ ЗА ПОСЛЕДНИЕ ДЕСЯТИЛЕТИЯ . . . . .	355

---

<i>Ю.Н. Авсюк, А.Л. Собисевич</i>	
ПРИЛИВНАЯ ЭВОЛЮЦИЯ СИСТЕМЫ ЗЕМЛЯ – ЛУНА – СОЛНЦЕ	
И ГЕОДИНАМИЧЕСКАЯ АКТИВНОСТЬ ЗЕМЛИ . . . . .	373
<i>В.Ч. Хон, И.И. Мохов</i>	
ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ГИДРОЛОГИЧЕСКОГО ЦИКЛА К ИЗМЕНЕНИЮ ОРБИТАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ	
И КОНЦЕНТРАЦИИ АНТРОПОГЕННЫХ ПАРНИКОВЫХ ГАЗОВ . . . . .	392
<i>В.М. Григорьев, Л.В. Ермакова, А.В. Мордвинов, Ю.А. Наговицын, А.Г. Тлатов,</i>	
<i>В.Г. Иванов, Е.В. Милецкий, Е.Ю. Наговицына, А.И. Хлыстова, С.А. Язев</i>	
ВОЗНИКНОВЕНИЕ АКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ НА СОЛНЦЕ, ИЗМЕНЕНИЯ ЕГО ГЛОБАЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ	
В 11-ЛЕТНЕМ ЦИКЛЕ И НА ДЛИТЕЛЬНОЙ ШКАЛЕ ВРЕМЕНИ . . . . .	399
<i>С.И. Сороко, В.П. Рожков, Е.Г. Сергеева, С.С. Бекшаев, С.С. Андреева, И.В. Николаев</i>	
ОСОБЕННОСТИ МОРФОФУНКЦИОНАЛЬНОГО РАЗВИТИЯ ЦЕНТРАЛЬНОЙ НЕРВНОЙ СИСТЕМЫ	
И ГЕМОДИНАМИКИ МОЗГА У ДЕТЕЙ И ПОДРОСТКОВ	
В УСЛОВИЯХ ЕВРОПЕЙСКОГО И ДАЛЬНЕВОСТОЧНОГО СЕВЕРА . . . . .	413

Научное издание

# ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПРИРОДНЫЕ ЯВЛЕНИЯ И КАТАСТРОФЫ

В 2 томах

Том 2

## ГЕОЛОГИЯ УРАНА, ГЕОЭКОЛОГИЯ, ГЛЯЦИОЛОГИЯ

*Печатается по решению Научного совета Программы  
фундаментальных исследований президиума РАН № 4*

Ответственный составитель д.ф.-м.н. Собисевич Алексей Леонидович

Технический редактор В.И. Горбенко  
Компьютерная верстка К.А. Мордвинцев  
Корректор С.Б. Суслова

Подписано в печать 05.09.11. Формат 60×90/8  
Гарнитура Таймс. Бумага мелованная. Печать офсетная  
Усл. печ. л. 54. Тираж 200 экз.

ИФЗ им. О.Ю. Шмидта РАН  
123995 ГСП-5, Д-242, Москва, ул. Б. Грузинская, 10

Отпечатано в типографии издательства «ПРОБЕЛ 2000»  
109544 Москва, ул. Рабочая, 91